

CAPÍTULO 7

DERIVADAS PARCIAIS DE ORDENS SUPERIORES

7.1 Derivadas Parciais de Ordens Superiores

Dada a função real de duas variáveis,

$$\begin{aligned} f &: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ X = (x, y) &\mapsto f(X) = f(x, y), \end{aligned}$$

se f possui derivadas parciais para todo ponto $X = (x, y) \in A(\text{aberto}) \subseteq \text{Dom}(f)$, podemos construir as funções

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &: A \subseteq \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ X = (x, y) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(X) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &: A \subseteq \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ X = (x, y) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(X) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \end{aligned}$$

Estas derivadas parciais que estudamos são chamadas de *derivadas parciais de primeira ordem de f* . Nosso objetivo agora é definir as *derivadas parciais de ordens superiores*.

Suponha então que as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ possuem derivadas parciais, com respeito às variáveis x e y , para todo $X = (x, y) \in B(\text{aberto}) \subseteq A(\text{aberto}) \subseteq \text{Dom}(f)$. Desta forma, podemos calcular $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (X)$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (X)$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (X)$ e $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (X)$ para todo $X = (x, y) \in B(\text{aberto}) \subseteq A(\text{aberto}) \subseteq \text{Dom}(f)$

Estas derivadas parciais das derivadas parciais da função f são chamadas de *derivadas parciais de segunda ordem* de f e suas notações são as seguintes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = (f_x)_x = f_{xx} = f_{11} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = (f_x)_y = f_{xy} = f_{12} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = (f_y)_x = f_{yx} = f_{21} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = (f_y)_y = f_{yy} = f_{22}\end{aligned}$$

Observação 7.1.1: Se definirmos $z = f(x, y)$, também utilizamos as notações $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Observação 7.1.2: As derivadas parciais de ordem maior do que dois são definidas de forma análoga. Por exemplo, se as derivadas parciais de segunda ordem de f possuem derivadas parciais, com respeito às variáveis x e y , para todo $X = (x, y) \in C(\text{aberto}) \subseteq B(\text{aberto})$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(X) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)(X), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(X) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)(X).\end{aligned}$$

Exemplo 7.1.1: Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x, y) = x^3y^2 + xy^4$.

Solução: Vamos inicialmente determinar as derivadas parciais de primeira ordem da função f .

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2y^2 + y^4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2x^3y + 4xy^3.\end{aligned}$$

Agora, podemos passar às derivadas parciais de segunda ordem.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 6xy^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= 6x^2y + 4y^3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 6x^2y + 4y^3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 2x^3 + 12xy^2.\end{aligned}$$

♡

Exemplo 7.1.2: Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x, y) = xye^{y^2}$.

Solução: Vamos inicialmente determinar as derivadas parciais de primeira ordem da função f .

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= ye^{y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2}.\end{aligned}$$

Agora, podemos passar às derivadas parciais de segunda ordem.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= e^{y^2} + 2y^2e^{y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= e^{y^2} + 2y^2e^{y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 2xye^{y^2} + 4xye^{y^2} + 4xy^3e^{y^2}\end{aligned}$$

♡

Exemplo 7.1.3: Considere a função f dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Determine $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Solução: Vamos inicialmente determinar as derivadas parciais de primeira ordem da função f . Para $(x, y) \neq (0, 0)$, podemos utilizar as regras de derivação, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y^3(x^2 + y^2) - (xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - (xy^3)2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

Para $(x, y) = (0, 0)$, conforme observado, temos que utilizar a definição. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0.\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2 + y^2)^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Vamos agora determinar as derivadas parciais mistas de segunda ordem da função f . Para $(x, y) \neq (0, 0)$, podemos utilizar as regras de derivação, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{(5y^4 - 3x^2y^2)(x^2 + y^2)^2 - (y^5 - x^2y^3)2(x^2 + y^2)2y}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{(x^2 + y^2)(2x^4 + 5y^6 - 3x^4y^2 - (4y^6 - 4x^2y^4))}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{2x^2y^4 + 5y^6 - 3x^4y^2 - 4y^6 + 4x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{y^6 - 3x^4y^2 + 6x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{(9x^2y^2 + y^4)(x^2 + y^2)^2 - (3x^3y^2 + xy^4)2(x^2 + y^2)2x}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{(x^2 + y^2)(9x^4y^2 + 10x^2y^4 + y^6 - (12x^4y^2 + 4x^2y^4))}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{9x^4y^2 + 10x^2y^4 + y^6 - 12x^4y^2 - 4x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{y^6 - 3x^4y^2 + 6x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3}. \end{aligned}$$

Para $(x, y) = (0, 0)$, conforme observado, temos que utilizar a definição. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k^5}{k^5} = 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0 + h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^6 - 3x^4y^2 + 6x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^6 - 3x^4y^2 + 6x^2y^4}{(x^2 + y^2)^3}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

♡

Observe que, nos Exemplo 7.1.1 e 7.1.2, temos a igualdade entre as derivadas parciais mistas de segunda ordem para todos os pontos no plano. Porém, isto nem sempre é verdade. De fato, no Exemplo 7.1.3 vimos que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. O teorema a seguir nos fornece uma condição suficiente para a igualdade das derivadas parciais mistas. Contudo, antes de enunciá-lo, vamos definir funções de *classe* C^k .

DEFINIÇÃO 7.1.1: Considere a função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se existe um conjunto aberto $A \subseteq Dom(f)$ tal que as derivadas parciais de f até ordem k existem

para todo $X = (x, y) \in A$ e elas são contínuas em $X_0 = (x_0, y_0) \in A$, dizemos que f é de classe C^k em $X_0 = (x_0, y_0)$. Se as derivadas parciais de f até ordem k existem e são contínuas para todo $X = (x, y) \in A$, dizemos que F é de classe C^k em A .

Em particular, se as derivadas parciais de f até segunda ordem existem para todo $X = (x, y) \in A(\text{aberto}) \subseteq \text{Dom}(f)$ e elas são contínuas em $X_0 = (x_0, y_0) \in A$, dizemos que f é de classe C^2 em A . E, neste caso, teremos a igualdade entre as derivadas parciais de segunda ordem. Confira o Teorema de Schwarz, enunciado a seguir.

TEOREMA 7.1.1: (Teorema de Schwarz) Considere a função $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $(x_0, y_0) \in A(\text{aberto}) \subseteq \text{Dom}(f)$. Se f é de classe C^2 em (x_0, y_0) , temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Se

$$\begin{aligned} f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

é uma função real de n variáveis reais, as derivadas parciais de ordem maior ou igual a dois são definidas de forma análoga. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \right). \end{aligned}$$

Exemplo 7.1.3: Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x, y, z) = x^2 \text{sen}(yz)$.

Solução: Vamos inicialmente determinar as derivadas parciais de primeira ordem da função f .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 2x \text{sen}(yz) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= x^2 z \cos(yz) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= x^2 y \cos(yz) \end{aligned}$$

Agora podemos passar às derivadas parciais de segunda ordem.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= 2 \operatorname{sen}(yz) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) &= 2xz \cos(yz) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) &= 2xy \cos(yz) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= 2xz \cos(yz) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) &= -x^2 z^2 \operatorname{sen}(yz) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) &= x^2 \cos(yz) - x^2 yz \operatorname{sen}(yz) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) &= 2xy \cos(yz) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) &= x^2 \cos(yz) - x^2 yz \operatorname{sen}(yz) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) &= -x^2 y^2 \operatorname{sen}(yz) \end{aligned}$$

♡

A definição de função de classe C^k também se aplica se f for uma função de mais do que duas variáveis, da mesma forma que o Teorema de Schwarz também permanece válido.

DEFINIÇÃO 7.1.2: Considere a função $f : \operatorname{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se existe um conjunto aberto $A \subseteq \operatorname{Dom}(f)$ tal que as derivadas parciais de f até ordem k existem para todo $X \in A$ e elas são contínuas em $X_0 \in A$, dizemos que f é de classe C^k em X_0 . Se as derivadas parciais de f até ordem k existem e são contínuas para todo $X \in A$, dizemos que F é de classe C^k em A .

TEOREMA 7.1.2: (Teorema de Schwarz) Considere a função

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

e seja $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq \operatorname{Dom}(f)$. Se f é de classe C^2 em X_0 , temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0), \quad i, j = 1, \dots, n.$$